

Satz von Taylor:  $f$   $(n+1)$ -mal diffbar,  $x_0 \neq x, x_0 \in [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$   
 $\Rightarrow \exists \xi \in ]x_0, x[ \text{ mit } : f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x); =$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{(n+1)}$$

Extremstellen:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  diffbar; 1)  $x_0 \in ]a, b[$  Max/Min  $\rightarrow f'(x_0) = 0$   
 2)  $f \in C^{(2)}([a, b]), f'(x_0) = 0, f''(x_0) > (<) 0 \Rightarrow \min(\max) \dots$

Potenzreihe:  $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  konvergiert für  $z_1 \in \mathbf{C} \Rightarrow$  konvergiert  
 für  $K(a, p) := z \in \mathbf{C} : |z-a| \leq p; 0 < p < |z_1-a|$

gliedweise Differentiation:  $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  Potenzreihe,  
 Konvergenzradius  $r > 0 \Rightarrow P$  diffbar f. alle  $z \in \mathbf{C}$  mit  $|z-z_0| < r$  und  
 $P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z-z_0)^n)'$  hat konv.-Radius  $r$ .

Taylor/Potenzreihe:  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$   $\infty$ -oft diffbar,  $x_0 \in ]a, b[$   
 $\exists : k, \delta \in \mathbf{R}^+, \forall n \forall x \in ]a, b[ \text{ mit } |x-x_0| \leq \delta : |f^{(n)}(x)| \leq k \Rightarrow f$  in Potenzreihe  
 entwickelbar. Außerdem: falls  $f^r = f$  für ein  $r$ .

Riemann-Integral:  $I = [a, b], Z^{(n)} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  Zerlegung von  
 $I (a = x_0 < \dots < x_n = b); I_j^{(n)} := [x_{j-1}, x_j]$

$$m_j^{(n)} := \inf_{x \in I_j} f(x); M_j^{(n)} := \sup_{x \in I_j} f(x); l_j = \text{Intervalllänge} = x_j - x_{j-1}$$

Riemann-Untersumme:  $s(Z^{(n)}) = \sum_{j=1}^n m_j^{(n)} l_j^{(n)}$ ; Riemann-Obersumme:

$$S(Z^{(n)}) = \sum_{j=1}^n M_j^{(n)} l_j^{(n)}$$

Es gilt:  $s(Z^{(n)}) \leq S(Z^{(n)}); \forall n, Z^{(n)} \subset Z^{(n+1)} \Rightarrow s(Z^{(n)}) \leq$   
 $s(Z^{(n+1)}); S(Z^{(n)}) \geq S(Z^{(n+1)});$  (also  $s$  (bzw  $S$ )( $Z^{(n)}$ ) monoton wachsend  
 (bzw fallend) u. beschränkt (durch  $S$  (bzw  $s$ ))  $\rightarrow$  konvergent)

R-Intbar:  $\sup\{s(Z^n) | Z^n \text{ Zerlegung}\}$  (unteres R-Int) =  
 $\inf\{S(Z^n) | Z^n \text{ Zerlegung}\}$  (oberes..), R-intbar falls beide gleich.

Integrierbarkeits-Kriterien:  $\forall \epsilon > 0 \exists$  Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  sodass:

$$S(Z) - s(Z) < \epsilon \Rightarrow f \text{ auf } [a, b] \text{ R-intbar}$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig  $\Rightarrow$  R(S)-intbar (bei Stieltjes: nicht  $dx$ , sondern  $d\sigma(x)$ ,  
 also  $l_j = \sigma(x_j) - \sigma(x_{j-1}), \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ) mon. wachsend notwendig.)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  monoton  $\Rightarrow$  R(S)-intbar;  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  mon. wachsend und  
 stetig notwendig.

Riemann-Zwischensumme:  $(Z^{(n)})_n$  Zerlegungsnullfolge, falls

$$\max_j l_j^{(n)} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

$Z$  Zerlegung von  $I, \xi_i \in I_i, S(Z, \xi_1, \dots, \xi_k) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) l_i$  R-Zwischens.  
 Falls  $f$  beschränkt:  $f$  auf  $[a, b]$  R-intbar  $\Leftrightarrow f$  jede Zerl.Nullfolge  $(Z^n)_n$  und  
 jede Wahl von Zwischenpunkten ist die Folge der Riemann  
 Zwischensummen konvergent.

Eigenschaften des Integral: linear:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx ; \text{ positiv:}$$

$$f \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0 ; \text{ monoton: } f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx ;$$

$$\text{Dreieck: } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx ; \text{ additiv:}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, a < c < b ; (\text{definit}) f \geq 0,$$

$$\text{stetig, } \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f = 0$$

Mittelwertsatz:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig  $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig,  $p : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  R-intbar,  $p \geq 0 \Rightarrow \exists \xi \in$

$$[a, b] \text{ mit } \int_a^b f(x)p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx$$

Hauptsatz:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  R-intbar und stetig in  $\xi \in [a, b]$

$$\Rightarrow F(x) := \int_c^x f(t) dt, c, x \in [a, b] \text{ in } \xi \text{ diffbar und } F'(\xi) = f(\xi)$$

$F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig diffbar  $\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$

Partielle Int:  $\int_a^b u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b (u(x)v'(x)) dx$

Substitution:  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$

uneigentliches Integral:  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbf{R} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$  falls  
 ex.

$f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$ , falls beide ex. für  
 mind. ein  $d$

$f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$ , falls. ex.

Ex. der Stammfunktion:  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  stetig  $\rightsquigarrow$

$\int_a^\infty f(x) dx$  ex.  $\Leftrightarrow \exists$  Stammfkt.  $F$  von  $f$  mit  $\lim_{c \rightarrow \infty} F(c)$  ex.  $\Leftrightarrow \forall$

$$\text{Stammfkt. } F \text{ von } f \text{ ex. } \lim_{c \rightarrow \infty} F(c).$$

Folngrenzwertere:  $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, \forall$  konvergenten  $y_n \lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n)$  ex.  
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = c$  (für diese Folgen  $y_n$ ).

Ex. uneigentl. Int, falls  $f$  durch uneigentl. intb. Fkt beschränkt:

$$f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, g : [a, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, \int_a^\infty g(x) dx \text{ ex.}; \forall c \in [a, \infty[ f \text{ auf } [a, c]$$

intbar,  $|f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int_a^{inf ty} f(x) dx \text{ ex. } (-\infty \rightsquigarrow \geq)$

Cauchy'scher Hauptwert: (CH Hw pv)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx \right); f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$f$  auf  $[a, x_0[$  und  $]x_0, b]$  uneigentl. diffbar  $\Rightarrow$   $f$  hat CH auf  $[a, b]$

Integralkriterium f. Reihen:  $f : ]p, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, p \in \mathbf{Z}, f$  mon. fallend.  $\Rightarrow$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

Gliedweise Integration:  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$  R-intbar,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{c[a, b]} = 0 \Rightarrow f \text{ ist R-intbar und}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Bei Reihen:  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$  R-intbar,  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  glm.  $\Rightarrow f$

$$\text{R-intbar und } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Potenzreihen: im inneren des Konv.-Kreis bel. oft gliedweise intbar.

gliedweise Differentiation:  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig diffbar, punktweise gegen  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  konv.,  $(f'_n)_n$  glm. konv. auf  $[a, b] \Rightarrow f$  stetig diffbar auf  $[a, b]$   
 und  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$

also:  $\frac{d}{dx} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{dx} f_n(x) \right)$

$\Phi : \mathbf{C}(I) \rightarrow \mathbf{C}(I)$  linearer stetiger Operator:  $\Phi(f)(x) := \int_a^x f(t) dt; x \in I$

Differentialgleichungen:  $y' = \alpha y, y(0) = y_0 \xrightarrow{HPST} y(b) - y(0) = \int_0^b y'(t) dt \Leftrightarrow$

$$y(b) = y(0) + \alpha \int_0^b y(t) dt \text{ Definiere}$$

$$T : \mathbf{C}(I) \rightarrow \mathbf{C}(I) : T(f(x)) = y(0) + \alpha \int_0^x f(t) dt. \text{ Suche nun Fixpunkt}$$

$$T(y) = y.$$

Fixpunkt ex. falls  $C(I)$  vollst. und  $T$  Kontraktion, also

$$\|T(f-g)\| \leq \alpha \|f-g\|; \alpha < 1$$

Partiell diffbar:  $f : \mathbf{R}^n \supset U \rightarrow \mathbf{R}^m; x^0$  innerer Pkt. v.

$$U \xrightarrow{\text{part. diffbar}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + h e^j) - f(x^0)}{h} \text{ partiell diffbar } \not\Rightarrow \text{stetig!}$$

Total diffbar:  $f : \mathbf{R}^n \supset U \rightarrow \mathbf{R}^m, x^0$  innerer Pkt von  $U, L$  lineare

$$\text{Abbildung } \begin{matrix} L(a+b) = L(a) + L(b) \\ L(\lambda a) = \lambda L(a) \end{matrix} \text{ mit: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0+h) - f(x^0) - L(h)}{|h|} = 0$$

Abschätzungen:  $o(g(x)) = f(x)$  für  $x \rightarrow \xi \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0;$

$$O(g(x)) = f(x) \text{ für } x \rightarrow \xi \Leftrightarrow \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C (\text{konst.}) \forall x \in (U \cap D) \setminus \{\xi\};$$

Total diffbar  $\Rightarrow$  stetig;  $L = f'(x^0)$  ist eindeutig (falls ex.)

Jacobi-Matrix:  $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$  in  $x^0$  nach allen Var. part. diffbar, Abl. stetig  $\Rightarrow$

$$\text{total diffbar in } x^0 \text{ und: } f'(x^0) = J_f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}_{\substack{i=1..m \text{ (Zeilen)} \\ j=1..n \text{ (Spalten)}}}$$

Hesse-Matrix  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} : f'' = H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$

Nabla:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$

Grad, Div, Rot, Laplace

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} : \text{grad}(f) = (\nabla f)^T; f : G \rightarrow \mathbf{R}^n : \text{div}(f) = \nabla \cdot f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i};$$

$$f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 : \text{rot}(f) = \nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix}; \Delta g = \text{div}(\text{grad}g)^T$$

Es gilt:  $F \in C^{(2)}(G, \mathbf{R}), f \in C^{(2)}(G, \mathbf{R}^3) \rightsquigarrow \text{rot}(\text{grad}F) = 0; \text{div}(\text{rot}f) = 0;$   
 $\Delta f = (\text{grad}(\text{div}f))^T - \text{rot}(\text{rot}f)$

Richtungsableitung:  $r \in S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n; |x| = 1\}; f : U \rightarrow$

$$\mathbf{R}; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x^0 + hr) - f(x^0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial r}(x^0) \text{ Falls}$$

$$f \in C^{(1)}(G, \mathbf{R}^1) \frac{\partial f}{\partial r}(x^0) = \text{grad}g(x^0) \cdot r$$

Hermann Amandus Schwarz:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , falls (eins) ex. und stetig

Gebiet:  $G \supset X$  offen:  $\forall x \in U \exists \epsilon > 0 \forall y \in X (d(x, y) < \epsilon \rightarrow y \in U)$

zusammenhängend: zu je 2 Pkt  $a, b \exists$  endlich viele Pkt  $x_1 \dots x_n$  mit:

$$ax_1 \dots x_n b \in G$$

Kettenregel:  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m; g : \mathbf{R}^m \supset U \rightarrow \mathbf{R}^p, f(U) \subset V$ ,  $f$  diffbar in  $\xi$   $g$   
 diffbar in  $f(\xi)$  dann:  $(g \circ f)' = g'(f(\xi))f'(\xi)$

MWSDiff:  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  diffbar,  $G \subset \mathbf{R}^n$  Gebiet,  $a, b \in G$  mit

$$ab = \{a+t(b-a) | 0 < t < 1\} \in G \Rightarrow \exists \xi \in ab : f(b) - f(a) = \text{grad}f(\xi) \cdot (b-a)$$

Multindizes:  $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}^{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}; |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n;$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!; D^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

Satz von Taylor:  $G \subset \mathbf{R}^n$  offen,

$$f \in C^{(r+w)}(G, \mathbf{R}^1); f(\xi+h) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) h^\alpha + R_r; R_r =$$

$$\sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi + \vartheta h) h^\alpha = \text{int}_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} \sum_{|\alpha|=r+1} D^\alpha f(\xi + th) h^\alpha dt$$

Extremstellen:  $f \in C^{(1)}(G), f : G \rightarrow \mathbf{R}$ ; notwendig:

$$\text{grad}f(x^0) = 0; \text{hinreichend: Hesse-M. positiv(negativ) definit; kein}$$

Min/Max falls indefinit.

Positiv definit:  $\forall x \in \mathbf{R}^n x^T A x \geq 0$  und  $A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

alle Eigenwerte  $> 0 \rightsquigarrow$  pos. def., alle

$$\text{Hauptminoren } (\det(a_{ij}))_{i,j=1..k}, k = 1..n > 0)$$

indefinit:  $\exists x, y \in \mathbf{R}^n x^T A x > 0, y^T A y < 0$

Tangente in 2D: in  $(\xi, f(\xi)) : \text{Steigung } f'(\xi) \rightarrow y = f'(\xi) \cdot x + \beta$  also  $f(\xi) =$

$$f'(\xi) \cdot \xi + \beta \Rightarrow \beta = f(\xi) - f'(\xi) \cdot \xi \Rightarrow \text{Tangente: } y = f(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

Tangente in 3D: bei Fläche in  $f(\xi, \eta)$ , in

$$x\text{-Richtung: } z = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) \cdot (x - \xi) + f(\xi, \eta); \text{ in}$$

$$y\text{-Richtung: } z = \frac{\partial}{\partial y} f(\xi, \eta) \cdot (x - \xi) + f(\xi, \eta)$$

Tangentialebene: in

$$(\xi, \eta, f(\xi, \eta)) : (x, y) \rightarrow z = f(\xi, \eta) + f_x(\xi, \eta)(x - \xi) + f_y(\xi, \eta)(y - \eta) =$$

$$f(\xi, \eta) + \text{grad}f(\xi, \eta)(x - \xi) \cdot \nabla x - \eta$$

T.-Hyperbene:

$$x_{n+1} = \text{grad}(x^0) \cdot (x - x^0) + f(x^0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla f(x^0) \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x^0 \\ x_{n+1} - f(x^0) \end{pmatrix} = 0$$

Tangentialvektoren:  $t_{x_i} = \begin{pmatrix} e^i \\ f_{x_i} \end{pmatrix}$

$f$  regulär in  $x^0 \Leftrightarrow$  in Umgeb. von  $x^0$  stetig diffbar und  $\det(f'(x^0)) \neq 0$

f lokal inv-bar in  $x^0$ , falls

$$\exists_U \text{Umgeb. von } x^0 \exists_V \text{Umgeb. von } f(x^0) f|_U : U \rightarrow V \text{ bijektiv.}$$

Menge der regulären Punkte ist offen!

Matrixnorm, verträglich: falls:  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, |A \cdot x| \leq \|A\| \cdot |x|$

$M \subset \mathbf{R}^n$  kompakt,  $f : M \rightarrow f(M)$  stetig und injektiv  $\Rightarrow f^{-1} : f(M) \rightarrow M$  stetig.

Umkehrsatz:  $G \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$  in  $x^0$  regulär  $\Rightarrow$  f lokal inv-bar:  $\exists$  offene Menge  $U, x^0 \in U, V = f(U)$  offene Umgeb. von  $f(x^0), f|_U : U \rightarrow V$  bijektiv,  $\exists g := (f|_U)^{-1}, g' = (f')^{-1} \circ g = (f' \circ g)^{-1}$

Satz über implizite Fkt.

Gegeben:  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m); f : \mathbf{R}^{n+m} \supset F \rightarrow \mathbf{R}^m, G$  offen, f stetig diffb.;  $\exists (x^0, y^0) \in G$  mit  $f(x^0, y^0) = 0$  und  $\det \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \right) \neq 0$ .

$\Rightarrow \exists U \subset G$  Umgeb. von  $(x^0, y^0)$  offen;  $\exists W \subset \mathbf{R}^n$  Umgeb. von  $x^0$  offen;  $\exists g \in C^1(W, \mathbf{R}^m)$  mit  $\{(x, y) \in U | f(x, y) = 0\} = \{x, g(x) | x \in W\}$

es gilt:  $\frac{\partial g}{\partial x} = - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$

Extrema unter Nebenbedingungen: Seien:

$f \in C^1(G, \mathbf{R}^1), g \in C^1(G, \mathbf{R}^m); G \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $n > m$  (also f, g von mehr Var. Abh., als Nebenbedingungen von g definiert werden).

f habe lokales Max/Min unter Nebenbed.  $g(x^0) = 0$

$\exists$  Umgehung  $U(x^0)$  mit  $\forall x \in U(x^0), g(x) = 0 \Rightarrow f(x) \leq (\geq) f(x^0)$

Rang  $\frac{\partial g}{\partial x}(x^0) = m$

$\Rightarrow \exists$  Lagrange-Multiplikator  $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$  mit  $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$  ist stationär in  $(x^0, \lambda^0) \rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial x, \partial \lambda}(x^0, \lambda^0) = 0$

konvergent: gegen a:  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} : \forall n > N d(a, x_n) < \epsilon$

Kriterien:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konfg, falls:

Cauchy:  $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall m > n > N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon$

Majorant:  $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n; b_n \geq \text{konv.}$  und  $\forall n |a_n| \leq b_n$

Quotient:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$  (also  $\forall n > N \leq C; C < 1; N \in \mathbf{N}$ )

Wurzel:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Verdichtungs:  $a_n$  mon. fallend,  $a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} (2^n \cdot a_{2^n})$  konv.

Leibniz:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n; a_n$  mon. fallende Nullfolge  $\rightsquigarrow$  konvg.

Stetigkeit:  $\epsilon - \delta : f : x \rightarrow Y$  stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$

$(\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) (\text{also } d_x(x, x_0) < \delta) : d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon)$

Folgen:  $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in Y$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

f glm. stetig auf  $U \rightarrow$  f stetig:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in U \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \epsilon$

f Lipschitz-stetig auf  $U \rightarrow$  f stetig:

$\exists L > 0 \forall x_1, x_2 \in U : \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$

Norm:  $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \|ax\| = |a| \cdot \|x\|; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bsp:  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$  oder  $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ .

Metrischer Raum:  $d(x, x) = 0, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y; d(x, y) =$

$d(y, x); d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad d : X \rightarrow X, \rightsquigarrow (X, d)$  metr. R., Normen induzieren Metriken.

Vollständiger Raum: Jede Cauchy-Folge in M konv. gegen El. aus M

U kompakt:  $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i; U_i$  offene TeilMengen von U,  $\Rightarrow M \subset \bigcup_{j \in J} U_j$  mit J endlich!

M dicht in topol. Raum R, falls  $\forall M \subset R \bar{M}$  abgeschl. Menge  $R \setminus \bar{M} \neq \emptyset$  mit  $M \subset R'$ . Also: Abschluss von M ist R.

Ring:

$R1 : \emptyset \in \mathbf{m}; R2 : A, B \in \mathbf{m} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{m}; R3 : A, B \in \mathbf{m} \Rightarrow A \setminus B \in \mathbf{m};$

Algebra: Ring und  $X \in \mathbf{m}$

$\sigma\mathcal{A}$ -Algebra:  $A1 : X \in \mathbf{m}; A2 : A \in \mathbf{m} \Rightarrow CA := X \setminus A \in \mathbf{m}; A3 : (A_i)_{i \in \mathbf{N}}$

Folge in  $\mathbf{m} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \mathbf{m}$

Inhalt:  $\mu : \text{Ring} \rightarrow \mathbf{R}^+_{\geq 0}; I1 : \mu(\emptyset) = 0; I2 : \mu \geq 0; I3 : (A_i)$  endl. Folge mit  $\forall i \neq j A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$

Prämaß:  $\mu : \text{Ring} \rightarrow \mathbf{R}^+_{\geq 0}; PM1 : \mu(\emptyset) = 0; PM2 : \mu \geq 0; PM3 : (A_i)_{i \in \mathbf{N}}$

abz. unendliche Folge mit:  $\forall i \neq j A_i \cap A_j = \emptyset$  und

$\bigcup_i A_i \in \text{Ring} \Rightarrow \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$

Maß: falls Prämaß  $\mu : \sigma$ -Algebra  $\rightarrow \mathbf{R}^+_{\geq 0}$

Inhalt: für  $\mu : \text{Ring} \rightarrow \mathbf{R}^+_{\geq 0}$  gilt:  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B); A \subset B \Rightarrow$

$\mu(A) \leq \mu(B); A \subset B, \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad (A_i)_{i \in \mathbf{N}}$

paarweise disj.,  $\bigcup_i A_i \in \text{Ring} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup_i A_i)$

Figur: = endliche (disj.) Vereinigung von Intervallen

$[a, b[ = \{x \in \mathbf{R}^n | a \leq x < b\}$

dabei ist  $a \leq b \Leftrightarrow a_i \leq b_i; a < b \Leftrightarrow a \leq b$  aber  $a \neq b; a < b \Leftrightarrow a_i < b_i$

Lebesguesches Prämaß:

$F = \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \mu(F) := \sum_{i=1}^n \mu(I_i); \mu([a, b]) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  ist  $\sigma$ -endlich auf  $\mathbf{R}^n \rightsquigarrow \exists (A_k)_{k \in \mathbf{N}} : (A_i \subset A_{i+1} \text{ und } \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k = X (= \mathbf{R}^n))$  und  $\mu(A_k) < \infty$

äußeres Maß:  $AM1 : \mu * (\emptyset) = 0; AM2 : A \subset B \Rightarrow \mu * (A) \leq \mu * (B); AM3 :$

$\mu * (\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu * (A_i)$

Fortsetzung nach Caratheodory:  $\mu$ Prämaß auf Ring in X  $\rightsquigarrow \mu * (M) :=$

$\left\{ \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \text{Ring}, \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \supset M \right\} \right.$  kleinste Überdeckung von M ist  $\left. \begin{matrix} \infty \text{ falls } = \emptyset \\ \end{matrix} \right\}$

äußeres Maß.

Messbar:  $\mu * (M) = \mu * (M \cap A) + \mu * (M \setminus A) (= M \cap CA)$

Borel-Algebra:  $\sigma$ -Algebra aus Intervallen im  $\mathbf{R}^n$ ; Elemente: Borel-Mengen;

Bezeichnung: **B**

Lebesgue-Maß: Lebesgue-messbare Mengen:  $C\mathcal{L}_L$ ; Einschränkung d.

Lebes.-Prämaß auf  $C\mathcal{L}_L \rightsquigarrow$  Maß!  $\lambda. \mathbf{B} \subsetneq C\mathcal{L}_L \subsetneq \wp(\mathbf{R}^n)$ .  $\lambda$  ist

translationsinvariant:  $A \in C\mathcal{L}_L \Rightarrow A + c = \{a + c | a \in A\} \in C\mathcal{L}_L$  und bewegungsinvariant:  $T : X \rightarrow (Sx + c) \in \mathbf{R}^n$  mit S orthogonale Matrix, als  $S^T = S^{-1} \rightsquigarrow \lambda(A) = \lambda(TA)$ .

(Lebesgue-)Nullmenge M, falls  $\mu^*_\lambda(M) = 0$

Aussage gilt fast überall, falls  $\exists$  Nullmenge  $M \subset \mathbf{R}^n$  mit  $A(x)$  gelte f. alle  $X \in \mathbf{R}^n \setminus M$ .

Abzählbare Mengen sind Nullmengen,  $\exists$  überabzählbare Nullmengen.

Auswahlaxiom: Zu jedem System nicht-leerer Mengen ex. eine Auswahl fkt., die jeder Menge des Systems genau eines ihrer Elemente zuordnet.

messbarer Raum:  $(X, U)$ , falls U  $\sigma$ -Algebra in  $\wp(X)$

$(X, U), (X, U')$  messb. Räume  $\rightsquigarrow T : X \rightarrow X'$  heißt

$UU'$ -messbar  $\Leftrightarrow T^{-1}(U') \subset U$ .

Treppenfkt.  $u : (X, U) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{B})$  falls u messbar (=stetig und  $X \subset \mathbf{R}^n$ ) und u nimmt nur endl. viele Werte an.

Falls  $f : (X, U) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{B})$  dann ist f pktweiser Limes einer Folge von

Treppenfkt. und falls  $f \geq 0$  dann  $\exists u_k \geq 0, u_k \in \mathbf{T}(U), u_k \nearrow f$ .

Maßraum:  $(X, U, \mu)$  mit  $(X, U)$  messb. und  $\mu$  Maß auf U und  $\mathbf{T}(U) =: \mathbf{T}$  Menge d. Treppenfkt.

Lebesgue-Integral:  $u \in \mathbf{T}, u \geq 0, u(x) = \sum_{j \in \text{endl}} \alpha_j \chi_{A_j}(x)$  (char. Fkt.),

$(A_j)$  endl. disj. Zerleg. von X, also  $X = \biguplus_{j \in \text{endl}} A_j, A_j \in U$  Dann:

$\int_X u d\mu := \sum_{j \in \text{endl}} \alpha_j \cdot \mu(A_j)$

$f \geq 0, (u_k)_k \subset \mathbf{T}$  Folge mit  $u_k \geq 0, u_k \nearrow f$ . Dann:  $\int_X f d\mu := \sup \int_X u_k d\mu$

$f^+ := \max(f, 0), f^- := -\min(f, 0)$  messbar und falls

$\int_X f^+ d\mu < \infty \Rightarrow \int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ .

Integrationsregeln: f, g  $\mu$ -intbar. Dann:  $\int_X \alpha a d\mu = \alpha \int_X a d\mu$ ;

$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu; f \geq g \Rightarrow \int f d\mu \geq \int g d\mu; \max(f, g)$

und  $\min(f, g)$  intbar.; f fast überall endlich

$\Rightarrow f^{-1}(\{-\infty, +\infty\})$  ist  $\mu$ -Nullmenge; h intbar  $\Leftrightarrow |h|$  intbar,

$\left| \int_X h d\mu \right| \leq \int_X |h| d\mu; \int_X |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow$  fast üb.  $f = 0$ ;

$\int_{A \cap B} f d\mu + \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

R-intbar  $\Rightarrow$  Lebesgue-Intbar und Int. stimmen überein.

Intbarkeit stetiger Fkt in beschr. Mengen:  $B \subset \mathbf{R}^n$  beschränkt,  $\lambda$

Lebesgue-Maß in  $\mathbf{R}^n, \lambda(\partial B)$  (Rand) = 0,  $f : B \rightarrow \mathbf{R}^1$  stetig.  $\Rightarrow$  B messbar

und f  $\lambda$ -intbar.

Beppolevi:  $f, f_k : B \rightarrow \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}^n$  messb.;  $(f_k)_k$  mon. wachsend,  $f_k \geq 0$ , messbar,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  punktweise.

$\Rightarrow \int_B f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(x) dx$ . (genauso mit Reihen, oder bei mon. wachsenden, beschränkten Fkt.-Folgen)

maj. Konv.  $(f_k)_k$  messbar,  $|f_k(x)| \leq g(x)$  fast überall in B, g intbar,

$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  (pktw.) ex. fast überall in B  $\Rightarrow f_k, f$  intbar und

$\int_B f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(x) dx$

Fantou:

$(f_k)_k$  messb.,  $f_k \geq 0 \Rightarrow \int_B \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(x) dx$

Cavalieri:  $A \subset \mathbf{R}^n$  messb.,  $p + q = n, y \in \mathbf{R}^q, A_y := \{x \in \mathbf{R}^p | (x, y) \in A\}$

Schnitt in y-Ebene,  $\lambda^p$  und  $\lambda^n$  Lebesgue-Maße in  $\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q$ .

$\Rightarrow \forall \text{fast } y \in \mathbf{R}^q A_y$  messb im  $\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q \ni y \rightarrow \lambda^p(A_y)$  messb. und

$\lambda^n(A) = \int_{\mathbf{R}^q} \lambda^p(A_y) dy$

Fubini1:  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+_{\geq 0}$  messb.,  $n = p + q$ . Dann: (a)

$\forall \text{fast } y \in \mathbf{R}^q f(\cdot, y) : x \rightarrow f(x, y)$  messb. in  $\mathbf{R}^p$ ;

(b)  $F(y) := \int_{\mathbf{R}^p} f(x, y), y \in \mathbf{R}^q$  messb. in  $\mathbf{R}^q$ ;

(c)  $\int_{\mathbf{R}^n} f(z) dz = \int_{\mathbf{R}^q} \left( \int_{\mathbf{R}^p} f(x, y) dx \right) dy$

Fubini2:  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  messb. und  $\int_{\mathbf{R}^n} |f(z)| dz$  oder  $\int_{\mathbf{R}^q} \left( \int_{\mathbf{R}^p} |f(x, y)| dx \right) dy$

endlich so gilt (a), (b), (c) mit intbar. Dann

insbesondere:  $\int_{\mathbf{R}^q} \left( \int_{\mathbf{R}^p} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^p} \left( \int_{\mathbf{R}^q} f(x, y) dy \right) dx$

Substitution:  $H \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $\Phi : H \rightarrow \mathbf{R}^n$  injektiv  $\in C^1, \det \Phi' \neq 0$  in H,

sowie  $f : \Phi(H) \rightarrow \mathbf{R}^+_{\geq 0}$  messbar oder  $f : \Phi(H) \rightarrow \mathbf{R}$  intbar. Dann:

$\Rightarrow \int_G f(x) dx = \int_H f(\Phi(u)) \cdot |\det \Phi'(u)| du$

Diff. unter dem Integral:  $f : A \times B \rightarrow \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^n$  messb.,  $B \subset \mathbf{R}^1$  offen und

$\forall y \in B \forall x \in A \exists x \rightarrow f(x, y)$  messb.; (b)  $\exists g : A \rightarrow \mathbf{R}$  intbar mit

$\forall y \in B \forall \text{fast } x \in A |f(x, y) \leq g(x); (c) \forall y \in B \forall \text{fast } x \in A B \ni y \rightarrow f(x, y)$  diffb.;

(d)  $\exists h : A \rightarrow \mathbf{R}$  intbar, mit  $\forall y \in B \forall \text{fast } x \in A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leq h(x)$ .

$\Rightarrow F(y) := \int_A f(x, y) dx$  auf B diffbar und  $F'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$