Kraft: gebundener Vektor – Newton
Flächenlast: Kraft/Fläche(Strecke) – Newton/m
Moment: Kraft mal Abstand – Newtonmeter

Gleichgewichtsbedingungen:
* Summe der Momente um einen Punkt ist Null
* Summe aller Kräfte ist Null (Ebene: aller Kräfte in x-Richtung und aller Kräfte in y-Richtung)

Schwerpunkt:
*Balken * $x_s = \sum(x_i * G_i) / \sum(G_i)$, wobei G_i die Kraft an Stelle mit Abst. x_i von Ursprung
* $x_s = \int(x * q(x)\, dx) / \int(q(x)\, dx)$

*Fläche
* $x_s = 1/A \int(x\, dA)$, $y_s = 1/A \int(y\, dA)$; $\int(x\, dA)$, $\int(y\, dA)$ sind Flächenmomente 1. Ordnung.
* Zusammengesetzte Fl.: $x_s = 1/A \sum(xi\, A_i)$
* Achsen durch Schwerpunkt und Symmetrieachsen = Schwerachsen,
* Flächenmomente 1. Ordnung bzgl. Schwerachsen sind Null.

Lager: * statisch best. = Lagerreaktion aus 3 GGB berechenbar (notwendig r=3)
* Mehrteilige: freischneiden, Verbindungsreaktionen entsprechend Wertigkeit des verbindenden Lagers auf beiden Seiten entgegengesetzt antragen
* r+v = 3n, r: #Lagerreaktionen, v: #Bindekräfte, n: #GGB

Fachwerke:
*stat. best.: notwendige Bed.: 2 k = s+r, k: #Knoten, s: #Stäbe, r: #Lagerreaktionen
*Stabkräfte:0Stab:-unbelasteter K., nur 2 Stäbe mit untersch. Richtg -> beide
-belasteter K. + 2 Stäbe, 1 Stab in Richtg der Last -> andrer 0Stab
-unbelasteter K. + 3 Stäbe, 2 Stäbe in gleiche Richtg -> 3. Stab 0Stab
-restliche Stäbe für alle Knoten durch Zugkräfte ersetzen (also von Knoten weg)
-Lagerreaktionen berechnen indem Fachwerk als starrer Körper aufgefasst wird.
-restliche Kräfte mit Hilfe der Lagerreaktionen und GGBs für jeden Knoten ausrechnen - dazu werden evtl nicht mehr alle GGB-Gleichungen benötigt.

Schnittgrößen: (Normalkraft, Querkraft, Biegemoment, an beiden Schnittufern genau entgegengesetzt anzutragen)
positive Schnittgrößen zeigen am positven Schnittufer in positive Korrdinatenrichtung.
* jeden Abschnitt freischneiden und aus GGB und Lagerreaktionen Schnittgrößen best.
* es gilt bei gerade Rahmen: $dQ/dx = -q(x)$ und $dM/dx = Q(x)$
(somit auch durch Integrieren lösbar, wobei die Integrationskonstanten durch Randbed.(S. 126, Band 1) und Übergangsbed. ermittelt werden.)

Arbeit: (Newtonmeter, Kraft x Weg):
* $W = \int_s(F * dr)$ bzw. $W = \int_\varphi(M * d\psi)$
* Arbeitssatz: $dW = \sum(F_i * dr_i) = 0$, F_i nur eingeprägte Kräfte, keine Lagerreaktionen
dr_i sind virtuelle Verschiebungen, die ungleich 0 angenommen werden (aber fast 0).
Ein mechanisches System ist im GG, wenn die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte bei einer virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage verschwindet.
*Gleichgewichtslage bestimmen:
-Kraftangriffspunkt von F in Abhängigkeit von 1 veränderlichen Größe beschreiben.
-Verrückungen dx, dy o. ä. ergeben sich durch Ableiten nach der veränderlichen Größe
-in Arbeitssatz $dW = Fx * dx + Fy * dy = 0$ einsetzen, dx, dy durch veränderliche Größe beschreiben, ... (veränderliche ausklammern, Klammer = 0 setzen).
*Arbeitssatz funktioniert auch mit Moment und Kraft ($dW = M * d\psi + G * dz$)

Reibung:
*Haftreibung: $H <= H_0 = \mu_0 N$
*Gleitreibung: $R = \mu N$

Kinetik des MP:

* $F = 0 \Rightarrow p = m v = const$
* $dp/dt = d(m v) / dt = F$ (bzw. $F = m a$)
* actio = reactio
* $m v - m v_0 = \int_{to}^{t} F\, dt$ (Impulssatz) (Impulsänderung in Zeitspanne=Integral der Kraft in Zeitspanne)
* Stoß (hier: Stoß gegen Wand senkrecht zur x-Achse -> nur v_x ändert sich, v_y bleibt):
  - $\overline{F} = \int_0^{ts} F\, dt$ (Stoßkraft) => $m v - m v_0 = \overline{F}$
  - elastischer Stoß: $F_R = F_K$; $\overline{v}_x = - v_x$ und Eintrittswinkel=Austrittswinkel
  - teilelastischer St.: $F_R = e F_K$, e Stoßzahl. => $\overline{v}_x = - e v_x$
  - Bestimmung von e durch fallen lassen: $e = - \overline{v}/v = \sqrt{2gh_2/2gh_1}$
* $L^{(0)} = r \times p = r \times m v$ (Impulsmoment/Drehimpuls/Drall, r: Ortsvektor zur Masse m)
* Kreisbewegung: $L^{(0)} = m r v = m r^2 \omega$ ($\omega=\varphi'$ Winkelgeschw; $mr^2= \Theta^{(0)}$ Massenträgheitsmoment)
* $dL^{(0)}/dt = \Theta^{(0)} \varphi'' = M^{(0)}$ (Momentensatz) (Ableitg des Drehimp. bzgl Pkt. 0 = Moment bzgl Pkt. 0)

* $E_k = 1/2\, m v^2$ kinetische Energie; $W=\int_s(F * dr)$
* $E_{k1} - E_{k0} = W$ (Arbeitssatz) (Arbeit zwischen 2 Bahnpunkten = Änderung der kinet. Energie)

Kinetik des MP-System:

* Freiheitsgrade = #MP * Fhg/mp - #kinem. Bindungen
* $F = m a_s$ (a_s Beschl. des Schwerp.)
* $p' = F$ bzw. $p - p_0 = \int_{to}^{t} F\, dt = \overline{F}$ (Impulssatz) , $p=m*v_s$
* $L'^{(0)} = M^{(0)}$; mit $L^{(0)} = \sum(r_i \times m_i v_i)$ (Momentensatz)
* $\Theta_a \varphi'' = M_a$; mit $\Theta_a = \sum(m_i r_i^2)$ Massenträgheitsmoment bzgl. Drehachse a-a
* $E_{k1} - E_{k0} = W^{(a)} + W^{(i)}$, bei starren Bindungen: $W^{(i)}=0$, (Arbeitssatz)
* konservatives Kraftfeld: Energiesatz: Summe aus kin. und pot. Energie= konst.
  ($1/2\, m v^2 + m g h = const$ => Fallbewegung, $v_0=0$: $v_{unten} = \sqrt{2gh}$)

*zentrischer Stoß (Zusammenstoß 2er Massen):
  - Geschwindigkeiten nach dem Stoß:
    $v_{1nacher} = m_1 v_1 + m_2 v_2 - e\, m_2(v_1 - v_2) / (m_1 + m_2)$
    $v_{2nacher} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + e\, m_2(v_1 - v_2) / (m_1 + m_2)$
  - $e = - (v_{1nacher} - v_{2nacher})/(v_1 - v_2)$

Kinematik des starren Körpers:

allg. Bewegung: $r_p = r_A + r_{AP}$; $r_{AP}=re_r$; $vp = v_A + v_{AP}$; $v_{AP}=r\omega e_\psi$;
$a_p = a_A + a^r_{AP} + a^\psi_{AP}$; $a^r_{AP}=-r\omega^2 e_r$; $a^\psi_{AP} = r\, \omega' e_\psi$

rollende Scheibe: $v_S = r\, \omega$

Momentanpol: Schnittpkt. der Senkrechten zu 2 Geschwindigkeiten von 2 Pktn.

Kinetik des starren Körpers:

* $\Theta_a \varphi'' = M_a$ (Momentensatz); $m x_s'' = F_x$; $m y_s'' = F_y$
* $\Theta_a = \int r^2 dm$ Massenträgheitsmoment,
* $\Theta_{S\_scheibe} = m R^2/2$; $\Theta_{S\_stab} = m l^2/12$ (Achse durch Schwerpunkt)
* $\Theta_{A\_stab} = m l^2/3$ (Achse durch Ende des Stabes)
* $\Theta_a = \Theta_s + r^2_s m$ (Satz von Steiner, s= Schwerpkt,r_s = Abstand a - Schwerpkt)
* $E_k = 1/2\, \Theta_a \omega^2$ (kinetische Energie des rotierenden Körpers)
* $W = \int_{\varphi 0}^{\varphi} M_a d\varphi$ (Arbeit durch Moment bei Drehung um von φ_0 nach φ)

* $m x_s' - m x_{s0}' = \overline{F}_x$; $m y_s' - m y_{s0}' = \overline{F}_y$; $\Theta_s \varphi' - \Theta_s \varphi_0' = \overline{M}_s$ (Impulssatz)
* $E_k = 1/2\, m v^{2+} 1/2\, \Theta_s \omega^2$ f

Flächenträgheitsmomente, Deviationsmomente:

* $I_{xx} = \int_A y^2\, dA$; $I_{yy} = \int_A x^2\, dA$; $I_{xy} = -\int_A xy\, dA$
* Satz von Steiner (Verschiebung des KS, eines der beiden muss Schwerpunkt-KS sein!!)
    * $I_{x'x'} = I_{xx} + \hat{y}_s^2 A$; $I_{\hat{y}\hat{y}} = I_{yy} + x'^2_s A$; $I_{x'\hat{y}} = I_{xy} - x'_s \hat{y}_s A$
* Hauptrichtung: $\tan(2\varphi) = 2 I_{xy} / (I_{xx} - I_{yy})$ (Deviationsmomente sind 0)
* Hauptmoment: $I_{1,2} = (I_{xx} + I_{yy})/2 \pm \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2/2 + I_{xy}^2}$
* allgemeine Drehung des Koordinatensystem um Winkel alpha:

$I_{\varphi\varphi} = (I_{xx} + I_{yy})/2 + (I_{xx} - I_{yy})/2 \cos(2\alpha) + I_{xy} \sin(2\alpha)$

$I_{\psi\psi} = (I_{xx} + I_{yy})/2 - (I_{xx} - I_{yy})/2 \cos(2\alpha) - I_{xy} \sin(2\alpha)$

$I_{\psi\varphi} = (-I_{xx} - I_{yy})/2 \sin(2\alpha) + I_{xy} \cos(2\alpha)$

Spannungen:

* Normalspannung: $\sigma = N/A$ bzw. $\sigma = dN/dA$
* Schubspannung/Tangentialspannung: $\tau = dT/dA$
* Axiom: $dM/dA = 0$
* Reißlänge: $\sigma(x) = G/l * x/A$ (G Gewicht der Länge l)

*ESZ: $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ Bolzmann-Axiom

* also $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$
* $\sigma_\alpha = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + (\sigma_x - \sigma_y)/2 \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$
* $\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y)/2 \sin(2\alpha) - \tau_{xy} \cos(2\alpha)$

* Hauptspannungsrichtung: Winkel α_H mit $\tau_{\alpha H} = 0$:
    - $\tan(2\alpha_H) = (2\tau_{xy})/(\sigma_x - \sigma_y)$
    - $\sigma 1{,}2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2}$

Verschiebungen/Verzerrungen:

* Stab: $\int_l \varepsilon\, dx = \Delta l$. falls ε = konst => $\varepsilon = \Delta l / l$ (wobei l urprüngliche Länge)

Stoffgesetz (hooksches Gesetz):

* 1D
    - $\sigma = E\, \varepsilon$ (Elastizitätsmodul)
    - $\tau = G\, \gamma$ (Schubmodul)
    - $\varepsilon_y = -\upsilon\, \varepsilon$ (Querdehnung, Querdehnzahl υ)
    - $\Delta l = (F\, l)/(A\, E)$ (F: Normalkraft zur Dehn-Richtung)

* 2D
    - $\varepsilon_x = 1/E\, (\sigma_x - \upsilon\, \sigma_y)$
    - $\varepsilon_y = 1/E\, (\sigma_y - \upsilon\, \sigma_x)$
    - $\varepsilon_z = -\upsilon/E\, (\sigma_x + \sigma_y)$
    - $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \tau_{xy}/G$

* Zusammenhang zwischen Konstanten: $E = 2G\,(1 + \upsilon)$, $\upsilon = 0{,}3$ bei Metallen

Wärmedehnung:

* $\varepsilon_{th} = \alpha * \Delta T$ (Wärmeausdehungskoeff. * Temp-diff)

* $\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{th}$

Formänderungs Energie:

* Formänderungsenergie: $\bar{u} = 1/2\ \sigma_x\ \varepsilon_x$
* $u_{stab} = 1/2 \int_l N^2/(EA)dx$
*Energiemethode: Satz von Menabrea: $du_{ges} / dx = 0$ (u_{ges}=Formänderungsenergie, x=stat. Unbekannte)

Dünnwandige Profile:

geschlossen

* $\tau_{x\varphi}\ h = t = M_T/(2A^*) = T/I_P\ r$ (h Profildicke, A vom Profil eingeschlossene Fläche)
* $\varphi = M_T\ l /(G\ I_P)$
* $\upsilon = M_T/(4A^{*2}G) \oint ds/h$ (bzw. $\upsilon = M_T/(G\ I_T)$)
* $\bar{u}=1/2\sigma\varepsilon=1/2\gamma\tau$; $u_T = 1/2 \int_l T_2/(G\ Ip)\ dx$; $u_N = 1/2\int_l N^2/(EA)dx$

offen

* $I_T = 1/3\ s\ h^3$ (Kreisbogen, s länge, h Profildicke)
* Rahmen: $I_T = \sum 1/3\ s_i\ h_i^3$

Biegung:

* $\sigma = M_B /I_{yy}\ z$
* $uB = 1/2 \int_l M_B^2/(E\ I_{yy})\ dx$

Verformung bei Biegung: (Bernoulli Balken)

* w(x) = ? vereinfacht für kleine Deformation:
* $w''(x) = - M(x) /(E\ I_{yy})$ (es gilt: $1/\varsigma = \kappa = M(x)/ (EI_{yy})$)
* $w(x) = \iint -M(x) /(E\ I_{yy})\ dx\ dx + C_1x + C_2$, C_i durch Randbedingung bestimmen!

geometrische RB: w, w'': beidseitig fester Balken: w(x=0, x=l) = 0
einseitig fester Balken: w(x=0)=0, w'(x=0)=0

Mehrbereich: am Übergang gilt w und w' stimmen überein.

*Flächenlast: - $w_{max} = q\ l^4 / (8\ E\ I)$ (einseitig eingespannter Balken)
- $\varphi_{max} = -w'_{max} = -q\ l^3/(6EI)$

* Moment am Balkenende:
  - $w_{max} = M\ l^2/(2EI)$
  - $\varphi_{max} = M\ l/(EI)$
* Einzellast am Balkenende:
  - $w_{max} = F\ l^3/(3EI)$
  - $\varphi_{max} = F\ l^2/(2EI)$

SATZ von CASTIGLIANO:

$w_{Fi} = dU(F_i,M_i) / dF_i$; $\varphi Mi = dU(F_i,M_i) / dM_i$

Beispiel: Einzellast am Balkenende:

$w_F = dU_B/dF = \int d/dF\ M(x)^2/(2EI)\ dx = \int M(x)/(EI)\ dM/dF\ dx$
$M(x) = Fx$, $dM/dF = x$ oben einsetzen, Integrieren.

SATZ von MENABREA:

wenn Verschiebung durch Biegung bekannt (z.B. =0, wegen Lager, und die LagerKraft X gesucht (einfach statisch unbestimmt): $dU/dX = w_x = 0$