Signatur: (S, F, τ) Sorten Funktionssymb., Stelligkeit.
Term(F) Grundterme, V Variablen - Term(F,V) Terme über sig. in Var. V
strikt: $\exists$ Grundterm f. Sorte. bzw. jede Sort der Sig.
Stellen: $O(t) : \mathbf{N}^* \cup e$,
Teilterm: $t|_p$, p Stelle
Termersetzng: $t[r]_p$ bzw. $t[p \leftarrow r]$ bzw. t_p^r einsetzen von r in t an Stelle p

Algebra: z.B. nat. Zahlen.
sig-Algebra zu Signatur **sig**: Algebra mit Trägermengen A_s zugeordnet zu Sorten von **sig**und mit totalen Funktionen $f_{\mathbf{A}}$ zugeordnet zu Fkt.Symb. von **sig**. Stelligkeiten müssen stimmen.

freie Termalgebra: $\mathbf{T_{sig}(V)}$: $\forall_s : A_s = Terms_s(F, V)$ und
$\forall_{fkts \in F} : fkts_{\mathbf{A}}(..) = fkts(..)$
Grundtermalgebra: $\mathbf{T_{sig}}$ ohne Variablen.

h:$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$**sig-Homomorphism**. falls
$h_s(f_{\mathbf{A}}(a_1..a_n)) = f_{\mathbf{A}'}(h_{s1}(a_1)..h_{sn}(a_n))$
$h_s : Terms_s(F) \rightarrow \mathbf{A}_s$ Interpretationsfkt. sind der eindeutige **sig**-Homomorph.

A Initiale Algebra, falls $\forall \mathbf{A}' \exists !$ **sig**-Homomorph. $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$
$\mathbf{T_{sig}}$ ist initial, initale Algebren sind isomorph!

Gleichungsspezifikation Gleichungssystem E mit Tupeln
$(u, v) \in Terms_s(F, V) \times Terms_s(F, V) \rightarrow spec = (\mathbf{sig}, E)$
Modelle Belegungsfkt. φ für $\mathbf{A} : \varphi_s : V_s \rightarrow A_s$
Bewertung $\varphi : Term(F, V) \rightarrow \mathbf{A}$
ist Modell von: $\models$: $\mathbf{A} \models_\varphi s = t$ gdw $\varphi(s) = \varphi(t)$; $\mathbf{A} \models s = t$ gdw
$\forall_\varphi \varphi(s) = \varphi(t)$; $\mathbf{A} \models E$ gdw **A** erfüllt alle Gleichungen in E.

Substitution $\sigma_s : V_s \rightarrow Terms_s(F, V)$ ordnet Var. Terme/Var. zu,
Def.-bereich endlich, $\sigma(x) = x$ für Rest.
Fortsetzung zu Homomorphismus:$\sigma : Term(F, V) \rightarrow Term(F, V)$ mit
$\sigma(f(t_1, ..., t_n)) = f(\sigma(t_1), ..., \sigma(t_n))$

Semantik Loose Semantik: $ALG(Spec) = \{sig - Algebren\mathbf{A} | \mathbf{A} \models E\}$

Gleichheit -Semantische G. $\mathbf{A} \models s = t$
-Operationale G. $t_1 \mapsto t_2$ $\exists p \in 0(t1), s = t \in E$, Subst. σ mit
$t_1|_p \equiv \sigma(s), t2 \equiv t1[\sigma(t)]_p(t1[p \leftarrow (t)])$ oder $t_1|_p \equiv \sigma(s), t2 \equiv t1[\sigma(s)]_p$
(Ersetze gleiches mit gleichem!)
-Gleicheitskalkül.

Eigenschaften $s =_E t \rightsquigarrow \sigma(s) =_e \sigma(t)$
$s =_E t, r \in Term(F, V) \rightsquigarrow r[s]_p =_E r[t]_p$
Quotientenalgebra$A/\sim = \bigcup_{s \in S}([a]_\sim : a \in A_s)$ und $f_{\mathbf{A}/\sim}$ mit
$f_{\mathbf{A}/\sim}([a_1], ..., [a_n]) = [f_{\mathbf{A}}(a1, ..., a_n)]$ ist sig-algebra.
$\mathbf{A} \models s = t \rightsquigarrow \mathbf{A}/\sim \models s = t$, da surjekt. Homomorphis. $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\sim$ ex.
Initiale Semantik T_{spec} E induziert Kongruenzrelation auf $\mathbf{A}.T_{sig}$
(Initiale) Termalgebra $\rightsquigarrow =_E$ ist kleinste Kongruenz die $\sim_{E, T_{sig}}$ umfasst
und $T_sig/ =_E := T_spec$ Modell von E.

Sig-korrekt spec sig-korrekt bzgl **A**, wenn T_{spec} isomorph zu **A**

Vergißbild Signaturen (S, F, τ) und (S', F', τ'), sig' Algebra $\mathbf{A}'$: es ist
$\mathbf{A}'|_{sig}$ sig-Anteil von $\mathbf{A}'$ mit $\forall_{s \in S}(\mathbf{A}'|_{sig})_s = A'_s$ und $\forall_{f \in F} f_{\mathbf{A}'|_{sig}} = f_{\mathbf{A}}$

korrekt bzgl sig spec= (sig', E') mit $sig \subseteq sig'$ korrekt bzgl
sig-Algebra**A**, wenn $T_{spec}|_{sig}$ isomorph zu **A**

implementieren er Spec spec'= (sig', E') implementiert
spec= (sig, E) gdw $sig \subseteq sig'$ und $T_{spec'}|_{sig}$ isomorph zu T_{spec}

Kombination $spec_1 = (sig_1, E_1), sig_1 = (S_1, F_1, \tau_1)$ und
$sig_2 = [S_2, F_2, \tau_2]$ Tripel, E_2Gleichungsmenge. $comb = spec_1 + (sig_2, E_2)$
Komb. gdw $spec = ((S_1 \cup S_2), ..)$ist Spezifikaktion. (Signatur + syntaktisch korrekte Gl.)

Erweiterung $comb = spec_1 + (sig, E)$ Erw. gdw $(T_{comb})|spec_1 \cong T_{spec_1}$

Anreicherung falls sig keine neuen Sorten enth.

parametrisierte Spec besteht aus
$Formal = (sig_F, E_F) \subseteq Body = (sig_B, E_B)$, $Body = Formal + (sig', E')$
Kombination.

Signaturmorphismus $sig_{1,2} = (S_i, F_i, \tau_i)$Sign.
$\sigma = (g, h)$mit$g : S_1^* \rightarrow S_2^*, h : F_1 \rightarrow F_2$ S., falls $\tau_2(hf) = g(\tau_1 f)$.

Parameterübergabe: Sig.morph.σ:sig(Formal)$\rightarrow$sig(Actual), (Actual Spezifikation die für Formal eingesetzt werden soll). $Value = (Actual, \sigma)$ definiert durch Body[Actual], wobei alle Sorten/Operatoren die in Formal definiert und in der Spezifikation von Body verwendet wurden auch durch σ(Sorte/Operator) ersetzt werden. Dies definiert einen neuen Signaturmorphismus $\sigma' : sig(Body[Formal]) \rightarrow sig(Body[Actual])$

Vergißbild entlang Signaturmorphismus $\sigma : sig' \rightarrow sig$
Sign.-morph., **A** sig-Algebra. $\Rightarrow \mathbf{A}|_\sigma$ sig'-Algebra mit
$\forall_{s \in S'}(A|_\sigma)_s = A_{\sigma(s)}$ und $\forall_{f in F'} f_{\mathbf{A}|_\sigma} = \sigma(f_{\mathbf{A}})$.

Abbildung zwischen sig-Homomorphismen
$\sigma : sig' = (S', F', \tau') \rightarrow sig$Sign.-morph., $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ **sig**-Homomorph.
$\Rightarrow h|_\sigma := \{h_{\sigma(s)} | s \in S'\}$ **sig**'-Homomorph.

PFEILEREI! ab S. 240

Spezifikationsmorphismus$spec, spec' = (sig', E')$ Spezifikationen.
Sign-morph.$\sigma : sig' \rightarrow sig$ Spez.-morph., falls
$\forall_{s=t \in E'} \sigma(s) = \sigma(t) \in (I)Th(E)$.

Parameterübergabe für Body[Formal] ist ein Paar $(Actual, \sigma)$ mit
Actual Spezifikation und $\sigma : Formal \rightarrow Actual$ Spez-morph.

Reduktionssysteme (ir)reduzibel; reflexiv,symmetrische,transitive Hülle; Normalform; unmittelbare Nachfolger; Ableitungskomplexität; noethersch(keine unendl.Kette);beschränkt; kreisfrei; lokal endlich.

Zusammenhänge$\rightarrow$kreisfrei, so $\rightarrow *$Partialordnung; noethersch, so kreisfrei; beschränkt, so noethersch, nicht umgekehrt; Teilmenge der transitiven Hülle einer noetherschen Rel. noethersch.

noethersche Ind.$\rightarrow$Relation auf U, P Prädikat auf U. P ist $\rightarrow -vollst.$,
falls $\forall_x[(\forall_{y \in \triangle^+(x)} P(y)) \supset P(x)]$ Ist $\rightarrow$ noethersch, so folgt $\forall_{x \in U} P(x)$

Definitionen konfluent:$\leftarrow^* \circ \rightarrow^* \subset \rightarrow^* \circ \leftarrow^*$
C.R.:$\longleftrightarrow^* \subset \rightarrow^* \circ \leftarrow^*$
lokal konfluent:$\leftarrow \circ \rightarrow \subset \rightarrow^* \circ \leftarrow^*$
streng konfluent:$\leftarrow \circ \rightarrow \subset \rightarrow^* \circ \leftarrow^{<=1}$
konvergent: noethersch und konfluent.

Wichtige Zusammenhänge noethersch, so $\exists$NF; konfluent gdw C.R.;
noethersch, so (konfluent gdw lokal konfluent);
a) $\rightarrow$ konfluent und $x \leftrightarrow^* y$. i) y irreduz., so $x \rightarrow^* y$; x+y irr.,so $x = y$;
ii)$x \leftrightarrow^* y$ gdw $\triangle^*(x) \cap \triangle^*(y) \neq \emptyset$; iii)NF eindeut.; iv) noeth. $\rightarrow \exists!$ NF
b) $(U, \rightarrow)$ mit $\forall_{x \in U} \exists!$ NF, so $\rightarrow$ konfluent (nicht noethersch).

Beweis noethersch $(M, \succ)$ $\succ$ wohlfund. Partialordn. Finde φ mit
$x \rightarrow y \Rightarrow \varphi(x) \succ \varphi(y)$ Dann folgt $\rightarrow$ noethersch.

1seitige konfluenzkonfluent gdw $\leftarrow \circ \rightarrow^* \subset \rightarrow^* \circ \leftarrow^*$
streng konfluent, so konfluent.

kommutieren$\rightarrow_1, \rightarrow_2$kommutieren: $\leftarrow_1^* \circ \rightarrow_2^* \subseteq \rightarrow_2^* \circ \leftarrow_1^*$. (kommutieren lokal: entsprechend).
a)komm. $\rightarrow_1, \rightarrow_2$ lokal + Vereinigung noethersch, so kommutieren 1,2.
b)$\rightarrow_1, \rightarrow_2$ konfluent und kommutieren, so ist Vereinigung konfluent.

Modulo$(U, \rightarrow, \sim_1)$ mit $\rightarrow$ Relation, $\sim_1$ symmetrische Relation
C.R. mod $\sim$: $(\leftrightarrow \cup \sim)^* \subseteq \rightarrow^* \circ \sim \circ \leftarrow^*$
lokal konfl. mod $\sim$: $\rightarrow \circ \leftarrow \subseteq \rightarrow^* \circ \sim \circ \leftarrow^*$
lokal kohärent mod $\sim$: $\rightarrow \circ \sim_1 \subseteq \rightarrow^* \circ \sim \circ \leftarrow^*$

C.r. mod $\sim$: Sei $(\rightarrow^* \circ \sim \circ \leftarrow^*)$ terminierend. Dann ist $\rightarrow$ genau dann
C.R. mod. $\sim$, wenn $\rightarrow$ lokal konfluent und kohärent mod $\sim$ ist.

Inferenzsystem orientieren$\frac{(\sim_1 \cup \{u \sim_1 v\}, \rightarrow)}{(\sim_1, \rightarrow \cup \{u \rightarrow v\})}$ falls $u > v$
neue konsequenz$\frac{(\sim_1 \cup, \rightarrow)}{(\sim_1 \cup \{u \sim_1 v\}, \rightarrow)}$ falls $u \leftarrow \circ \rightarrow v$
simplifizieren$\frac{(\sim_1 \cup \{u \sim_1 v\}, \rightarrow)}{(\sim_1 \cup \{u \sim_1 w\}, \rightarrow)}$ falls $v \rightarrow w$
Identitäten entfernen $\frac{(\sim_1 \cup \{u \sim_1 u\}, \rightarrow)}{(\sim_1, \rightarrow)}$

EigenschaftenSei $(\sim_1, \rightarrow) \vdash_p (\sim'_1, \rightarrow')$ ein Ableitungsschritt im Inf.Sys.
a)$\rightarrow \subseteq >$, so $\rightarrow' \subseteq >$ **b)**$(\sim_1 \cup \leftrightarrow)^* = (\sim'_1 \cup \leftrightarrow')^*$

BEWEIS! das Inf-Sys konvergente Relation liefert Folie 278ff

Termersetzungssysteme Regel: Paar(l,r) l,r Terme einer Sorte, Schreib
$l \rightarrow r$
Regelmenge(system) R def. Reduktionsrealtion $\rightarrow_R$ auf Term(F,V):
$t_1 \rightarrow_R t_2$ gdw
$\exists l \rightarrow r \in R, p \in O(t_1), \sigma Substitution : (t_1|_p = \sigma(l) \wedge t_2 = t_1[\sigma(r)]p$
(Anwendung von Regeln auf Teilterm).

$s \rightarrow_R t$, so $\sigma(s) \rightarrow_R \sigma(t)$ und $u[s]_p \rightarrow_R u[t]_p$

Falls Subst. ex. mit $\sigma(l) = t$, dann
$\forall_{u, x : u \in O(l), l|_u = x \in V} u \in O(t) \wedge \sigma(x) = t|_u$

Subsumtionsordnung $s \preceq t$ gdw $\exists_\sigma : \sigma(s)$ Teilterm von t; $s \prec t$ gdw
$s \preceq t \wedge \neg(t \preceq s)$ noetheresche Partialordnung.

Unifikationskalkül Löschen$\frac{E \cup \{s = s\}, \sigma)}{(E, \sigma)}$
Split$\frac{(E \cup \{f(s_1, \ldots, s_m) = g(t_1, \ldots, t_n)\}, \sigma}{(E \cup \{s_i = t_i\}, \sigma}$ falls f=g, sonst (f$\neq$g): unlösbar
Merge $\frac{E \cup \{x = t\}, \sigma}{\tau(E), \sigma \cup \tau}$falls $x \notin Var(t), \tau = \{x = t\}$; sonst:
$(x \in Var(t) \wedge x \neq t)$: unlösbar.

kritische Paare $u \in O(l_1), l_1|_u \notin V, \sigma = mgu(l_1|_u, l_2)ex$. Dann ist
$(\sigma(r_1), \sigma(l_1[r_2]_u))$ das kritsche Paar zu $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2, u \in O(l_1)$

critical Pair Lemma $t_1 \rightarrow_R t \rightarrow_R t_2$ folgt $t_1 \downarrow t_2$ oder $t_1 \leftrightarrow_{CP(r)} t_2$

linear Variablen kommen höchsten einmal vor.

Hauptergebnis lokal konfluent, wenn $\forall_{(t_1, t_2) \in CP(R)}$ zusammenführbar
R linear u. CP(R)=$\emptyset$, so R konfluent

$\epsilon - \epsilon$ **-abgeschl.** $\forall_{(t_1, t_2) \in CP(R)} \exists_t t_1 \rightarrow^\epsilon t \leftarrow^\epsilon t_2$; ϵ =0 oder 1
$\epsilon - \epsilon$ **-konfluent.** $\leftarrow_R \circ \rightarrow_R \subseteq \rightarrow_R^\epsilon \circ \leftarrow_R^\epsilon$

Parallelreduktion $t \mapsto_R t'$ gdw $\exists_{U \subset O(t)}$ $\forall_{u_i,u_j:i\neq j \rightsquigarrow u_i|u_j} \exists_{l_i \to r_i \in R, \sigma_i} t|_{u_i} = \sigma_i(l_i)$ und $t' = t[\sigma_1(r_1)]_{u_1}...[\sigma_n(r_n)]_{u_n}$

SatzR links-linear und parallel 0-abgeschlossen, so $\mapsto_R$ streng konfluent, also R konfluent.

Terminierung R terminiert gdw $\exists_\succ : \forall_{l\to r \in R, \sigma} \sigma(l) \succ \sigma(r)$;$\succ$monoton. R noethersch gdw $\exists_\succ$ Reduktionsordnung(noethersch,stabil,monoton): $\forall_{l \to r \in R} l \succ r$

Knuth-Bendix-Vervollst. Orientieren $\frac{(E \cup \{s=t\}, R)}{(E, R \cup \{s \to t\}))}$,falls $s > t$.
Generieren $\frac{(E,R)}{(E \cup \{s=t\},R))}$,falls $s \leftarrow_R \circ \to_R t$(krit.Paar).
Simp. GL $\frac{(E\cup\{s=t\},R)}{(E\cup\{u=t\},R))}$,falls $s \to_R u$.
Simp. RS $\frac{(E,R\cup\{s\to t\})}{(E,R\cup\{s \to u\}))}$,falls $t \to_R u$.
Simp. LS $\frac{(E,R\cup\{s\to t\})}{(E\cup\{u=t\},R))}$,falls $s \to_R u$ mit $l \to r$ und $s \succ l$ (SubSumOrd).
Identitäten entfernen

Berechenbarkeit$f : M_1 \times ... \times M_n \to M_{n+1}$ (partielle) Fkt.T_i Grundtermmengen, $\hat{f}$n-stelliges Ftk.-Symb, E Gleichungsmenge.
$\mathbf{I} : T_i \to M_i$ Dateninterpretation.
$\hat{f}$ implementier f unter $\mathbf{I}$ in E gdw $\mathbf{I}(T_i) = M_i$ und $f(\mathbf{I}(t_1), ..., \mathbf{I}(t_n)) = \mathbf{I}(t_{n+1})$ gdw $\hat{f}(t_1, ..., t_n) =_E t_{n+1}$

$\hat{f}$ impl. TOTALE Ftk f, falls: **10.1** $\mathbf{I}(T_i) = M_i$ und $f(\mathbf{I}(t_1), ..., \mathbf{I}(t_n)) = \mathbf{I}(t_{n+1}) \Rightarrow \hat{f}(t_1, ..., t_n) =_E t_{n+1}$ und: E konfluent und $T_n + 1$ irreduzibel. (oder $\forall_{t,t' \in T_n+1} \mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(t')$ falls t auf t' reduz.).

10.3$\mathbf{I}(T_i) = M_i$ und $\forall_{t,t' \in T_{n+1}} \mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(t')$ gdw $t =_E t'$ und $\forall_{t_i \in T_i i=1..n} \exists t_{n+1} \in T_{n+1}$ $\hat{f}(t_1..t_n) =_E t_{n+1}$ und $f(\mathbf{I}(t_1)..\mathbf{I}(t_n)) = \mathbf{I}(t_{n+1})$

cond(tt,x,y)=x; cond(ff,x,y)=y; x or y=cond(x,tt,y); [cond(x,tt,tt)=tt; cond(x,cond(x,y,z),u)=cond(x,y,u);] x et y=cond(x,y,ff) (Problem ohne []: x or tt =tt nicht ableitbar. ohne [] trtozdem korrekt implementiert (nach 1.3))

Kleensche Rekursion/Einsetzung kann man nicht 1 zu 1 übernehmen, da sonst Fkt. durch Gleichungssepz. definiert, wenn eigentliche Fkt. nicht definiert (weil nicht alle Argumente definiert, aber es werden für Gleichungsauswertung garnicht alle Argumente benötigt).

Primitve Rekursion: 1 zu 1 übernehmen (total).
0,succ,Proj,Einsetz:$f(x_1..x_n) = g(h_1(x_1..x_n)..h_n(x_1..x_n))$,Prim.Rek: $f(x_1..x_n, 0) = g(x_1..x_n), f(x_1..x_n, y+1) = h(x_1..x_n, y, f(x_1..x_n, y))$ konfluent, links-linear, CP=$\emptyset$, Terminierung: zeigen das Ackermann(linke Seite) > Ackermann(rechte Seite)

Minimierung$\mu_y[g(x_1..x_n, y) = 0] = z$ gdw $g(X_1..x_n, i) \neq 0$ def. f. $i = 1..z-1$ und $g(x_1..x_n, z) = 0$
$\hat{g}, E_{\hat{g}}$ implementiere g. Setze:
$E_{\hat{f}} := E_{\hat{g}} \cup \{\hat{f}(x_1..x_n) \to \hat{f}^*(x_1..x_n, \hat{0}), \hat{f}^*(x_1..x_n, y) \to \hat{f}^+(\hat{g}(x_1..x_n, y), x_1..x_n, y), \hat{f}^+(\hat{0}, x_1..x_n, y) \to y, \hat{f}^+(\hat{s}(x), x_1..x_n, y) \to \hat{f}^*(x_1..x_n, \hat{s}(y))\}$
Bew. per Ind: $\forall_{i \leq k} \hat{f}^*(\hat{k}_1..\hat{k}_n, (k \hat{-} i)) \to_E^* \hat{k}$ $E_{\hat{f}}$ konfluent, Satz10.3. -> $(\hat{f}, E_{\hat{f}})$ implementiert f. (Natürlich nicht Terminierend).

Trick für Rekursionsgleichungen:
$\hat{f}(x,y) = \hat{(f)}_1(\hat{h}_1(x,y)..\hat{h}_3(x,y), \hat{f}_2(\hat{h}_1(x,y))..\hat{f}_2(\hat{h}_3(x,y)))$
$\hat{f}_1(x_1..x_2, \hat{0}..\hat{0}) = \hat{g}(x_1..x_3)$. $\hat{f}_2(\hat{s}(x)) = \hat{f}_2(x)$, $\hat{f}_2(\hat{0}) = \hat{0}$ implementiert $f(x,y) = g(h_1(x,y)..h_3(x,y))$ Beweis mit Definition 10.1

Registermaschinen Fkt.SymB: a_i(erhöhe Reg. i) s_i(erniedrige reg. i) $a \circ s$(Verkettung) $(M)_i$(führe M aus bis i=0)

Gleichungssystem: tup_n n-stelliges Fkt-Symb. (Tupel) eval 2-steliges Fkt-Symb. $E_n := \{eval(a_i, tup_n(x_1..x_i..x_n) \to tup_n(x_1..\hat{s}(x_i)..x_n), eval(s_i, tup_n(x_1..\hat{0}..x_n) \to tup_n(x_1..\hat{0}..x_n), eval(s_i, tup_n(x_1..\hat{s}(x_i)..x_n) \to tup_n(x_1..x_i..x_n), eval(x_1 x_2, t) \to eval(x_2, eval(x_1, t)), eval((x)_i, tup_n(..x_{i-1}, \hat{0}, x_{i+1})) \to tup_n(..x_{i-1}, \hat{0}, x_{i+1}), eval((x)_i, tup_n(..x_{i-1}, \hat{s}(y), x_{i+1})) \to eval((x)_i, eval(x, tup_n(..x_{i-1}, \hat{s}(y), x_{i+1})))\}$ konfluent linkslinear, CP=$\emptyset$, nicht total-> Def. 10.1 Induktion über Aufbau von p.

Berechenbarkeit $h(x) = \left\{ \begin{array}{r} \mu_y[T_1(x,x,y) = 0] fallsexistiert \\ 0, sonst \end{array} \right.$. h wird durch folgende Prädikate festgel.:(1) $((T_1(x,x,y) = 0 \wedge \forall_{z<y} T_1(x,x,z \neq 0)) \to h(x) = y$. und (2)$(\forall_{z<y} T_1(x,x,z) \neq 0) \to (h(x) = 0 \vee h(x) \geq y)$. Es gibt Prim. Rek. Fkt. $P_i(x,y,u)$ mit $P_1(x,y,(h(x)) = 0$ gdw (1) gilt und $P_2(x,y,h(x))$ gdw (2) gilt.

Da P_1, P_2 prim. rek., gibt es ein Gleichunsystem E für P_i mit Fkt-Smyb $\hat{P}_i$. Füge Gleichungen $\hat{P}_i(x,y,\hat{h}(x)) = \hat{0}$ hinzu.
Man kann also implizit nicht rekurisive Fkt. spezifizieren, wenn man beliebige Modelle als Interpret. zulässt.

berechenbar A berechenbar, falls ihre Trägermengen und alle Operationen rekursiv.
Spec=(sig,E) rekursiv, falls T_{spec} rekursiv.

Spec für sig-algebren A rekursive termerzeugte sig-Algebra. Dann ex. endlich Anreicherung sig' von sig und spec'=sig',E) mit $T_{spec'}|_{sig} \cong \mathbf{A}$. (es gibt sogar ein konvergentes Regelsystem R, statt E, so dass dies gilt).

ASM Sequentielle Zeit: Berechnungen linear geordnet
Abstrakte Zustände: Jede Art mathem. Realität kann durch Struktur 1. Stufe dargest. werden
Bounded Exploration: Jeder Berechn.Schritt hängt nur von einer endlichen Zustands.-Inf. ab

sequ. Algorith. A: Zustandsmenge S(A); I(A)⊆S(A) initiale Zust.; $\tau_A : S(A) \to S(A)$ Einschrittfunktion
Zustände = Strukt. 1. Stufe, mit gleichem vokabular, τ verändert nicht die Basismenge, abgeschloss. gegen Isomorphismen
Lauf: endliche oder unendlich Folge von Zuständen $X_0, X_1, ...$ mit $X_0 \in I(A)$ und $\tau_A(X_i = X_{i+1}$
äquivalent: S, I, τ gleich.

klassifiz. Funktionen dynamisch, falls Interpretation von τ geändert werden darf, sonst statisch.

UpdateMengen Lokation: Paar $(f, \bar{a})$ ($\bar{a}$ tupel der Stelligkeit von f)
Update: $((f, \bar{a}), b)$ mit $b \in X$; $Content_X(f, \bar{a})$ Wert der Interpr. $f(\bar{a})$
UpdateMenge Δ konsistent.../Ausführung: $X + \Delta$;
$\Delta(A, X) := \tau_A(X) - X$

erreichbar a erreichbar, falls a=Val(t,X), t Grundterm in Signatur von Zustand X.; Lokation (f,a), falls jedes Element im Tupel a erreichbar.

Bounded Exploration Es gibt eine endl. Menge T von Termen in A mit $\Delta(A,X) = \Delta(A,Y)$ für Zustände X,Y die auf T übereinstimmen (also $Val(t,X)?Val(t,Y)$ für $T \in T$). T=Bounded-Expl.-Zeuge.

sequen.Algorith. Objekt A mit Sequ. Zeit, Abstrakt. Zust. 1. Stufe, Bounded Exploration.
A hat ein Vokabular und einen bounded Exploration-ziegen T. T ist Subterm.abgeschlossen, enthätl true, false, undef. Die Terme aus T heißen kritisch. Val(t,X) sind kritische Werte in X.

$((f, a_1, .., a_j), a_0) \in \Delta(A, X)$, so $a_0, ..., a_j$ kritische Werte in X.

Signatur σendliche Menge von Funktions-Namen, mit Stelligkeit, statisch oder dynamisch, true, fals undef gehört zu jeder Sig.

Zustand A zur Sig: Menge X=|**A**| mit Interpretation $f^{\mathbf{A}} : X^n \to X$ für jede Fkt. f
Lokation $l = (f, (a_1, ..., a_n))$, Inhalt: $\mathbf{A}(l) := f^{\mathbf{A}}(a_1, .., a_n)$
Update (l,v), consistent...; Feuern: $(\mathbf{A} + U)(l) = v$, falls $(l, v) \in U$; $\mathbf{A}(l)$: sonst
Komposition: Die letzte UpdateMenge zählt. Wenn also beide Konsistent, dann auch die Komposition.

Terme, Variablenbelegungen (Environment)
$\zeta : Var \to |\mathbf{A}|$Notation$[x \mapsto a]$

value $[[t]]_\zeta^{\mathbf{A}}$: t=x: $\zeta(x)$; t=f:$f^{\mathbf{A}}([[t_1]]_\zeta^{\mathbf{A}}, ...,)$; t=x:$x^{\mathbf{A}}$

Formeln s=t, $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi)(\varphi \vee \psi), \forall_x \varphi, \exists_x \varphi$

value $[[s = t]]_\zeta^{\mathbf{A}}$ =true, wenn $[[s]]_\zeta^{\mathbf{A}} = [[t]]_\zeta^{\mathbf{A}}$ sonst false, etc.

Coincidence,Subst.,Isomorph. ζ, η Belegungen: $\zeta(x) = \eta(x)$ für alle freien Var., dann $[[w]]_\zeta^{\mathbf{A}} = [[w]]_\eta^{\mathbf{A}}$ (w term oder formel)
t Term, $a = [[t]]_\zeta^{\mathbf{A}}$;dann $[[w\frac{t}{x}]]_\zeta^{\mathbf{A}} = [[w]]_{\zeta[x \mapsto a]}^{\mathbf{A}}$
α Isomorph. $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, dann $[[w]]_\zeta^{\mathbf{A}} = [[w]]_{\alpha \circ \zeta}^{\mathbf{B}}$

Regelnskip, $f(s_1, .., s_n) := t$, P par Q, if φ then P else Q, let x = t in P, forall x with φ do P, choose x with φ do P, P seq Q, $r(t_1, ..., t_n)$ rufe Regel r mit n freien Variablen auf (Regeldeklaration: $r(x_1, .., x_n) = P$ mit $x_1, .., x_n$ freie Var. in P)

yields-Kalkül $\frac{}{yields(skip,\mathbf{A},\zeta,\emptyset})$
$\frac{}{yields(f(s_1,..,s_n):=t,\mathbf{A},\zeta,((f,([[s_1]]_\zeta^{\mathbf{A}},...)),[[t]]_\zeta^{\mathbf{A}}})$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta,U) yields(Q,\mathbf{A},\zeta,V)}{yields(PparQ,\mathbf{A},\zeta,U\cup V})$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta,U}{yields(if\varphi thenPelseQ,\mathbf{A},\zeta,U}$ falls $[[\varphi]]_\zeta^{\mathbf{A}} = true)$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta[x\mapsto[[t]]_\zeta^{\mathbf{A}}],U)}{yields(letx=tinP,\mathbf{A},\zeta,U})$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta[x\mapsto a],U_a) \text{ für alle } a\in range(x,\varphi,\mathbf{A},\zeta)}{yields(forallxwith\varphi doP,\mathbf{A},\zeta,\bigcup_{a\in range(x,\varphi,\mathbf{A},\zeta)} U_a})$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta[x\mapsto a],U) \text{für EIN} a\in range(x,\varphi,\mathbf{A},\zeta)}{yields(choosexwith\varphi doP,\mathbf{A},\zeta,U})$ (oben leer, falls range leer)
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta,U) yields(Q,\mathbf{A}+U,\zeta,V)}{yields(PseqQ,\mathbf{A},\zeta,U\oplus V})$ falls U consistent, sonstQ weglassen.
$\frac{yields(P\frac{t_1...t_n}{x_1...x_n},\mathbf{A},\zeta,U}{yields(r(t_1,..,t_n,\mathbf{A},\zeta,U}$ mit $r(x_1, ..., x_n) = P)$ Deklaration
Coincidence, Substitution,Isomormpismus $\zeta(x) = \eta(x)$ f. alle freien

Var. einer Regel P und $yields(P, \mathbf{A}, \zeta, U)$,dann: $yields(P, \mathbf{A}, \eta, U)$
t Term, $a = [[t]]^{\mathbf{A}}_{\zeta}$. Dann $yields(P\frac{t}{x}, \mathbf{A}, \zeta, U$ gdw $yields(P, \mathbf{A}, \zeta[x \mapsto a], U$
$\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ Isomorphismus, $yields(P, \mathbf{A}, \zeta, U)$, dann
$yields(P, \mathbf{B}, \alpha \circ \zeta, \alpha(U))$

reserve Condition A erfüllt reserve Bedingung bzgl ζ, falls
$\forall_a \in Res(\mathbf{A})\ ran(\zeta)$:
a ist nicht Inhalt einer Lokation von $\mathbf{A}$
wenn a ein Element einer Lokation l außerhalb der Reserve ist, dann content(l) = undef.

$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta[x\mapsto a],U)}{yields(importxdoP,\mathbf{A},\zeta,U\cup\{((Reserve,a),false)\}})ifa \in Res(\mathbf{A}) \setminus ran(\zeta)$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta,U)yields(Q,\mathbf{A},\zeta,V)}{yields(PparQ,\mathbf{A},\zeta,U\cup V})ifRes(\mathbf{A}) \cap El(U) \cap El(V) \subseteq ran(\zeta)$
$\frac{yields(P,\mathbf{A},\zeta[x\mapsto a],U_a)\text{ für alle }a\in range(x,\varphi,\mathbf{A},\zeta)}{yields(forallxwith\varphi doP,\mathbf{A},\zeta,\bigcup_{a\in range(x,\varphi,\mathbf{A},\zeta)}U_a})if\forall_{a\neq b}Res(\mathbf{A}) \cap El(U_a) \cap El(U_b) \subseteq ran(\zeta)$
$\mathbf{A}$ erf. reserve-Bed. bzgl. ζ, $yields(P, \mathbf{A}, \zeta, U)$, dann $\mathbf{A} + U$ erf. reserve-Bed. ζ.
$Res(\mathbf{A} + U) \setminus ran(\zeta) \subset Res(\mathbf{A}) \setminus El(U)$

Zustände mit permutierenten Reserven die die res-Bed. erfüllen sind isomorph.

P regel ohne choose. $\mathbf{A}$ erf. res-Bed. bzgl. ζ, gebundene Var. nicht in ζ definiert, $yields(P, \mathbf{A}, \zeta, U), yields(P, \mathbf{A}, \zeta, U')$, dann: $\exists$ permutation α von $Res(\mathbf{A}) \setminus ran(\zeta)$ mit $\alpha(U) = U'$

DASM A: verteiltes Programm, I_A nichtleere Menge init. Zust., dynamisches Relationssymbol AGENT: interpretation endliche Menge autonomer Agenten. Verhalten des Agenten a in Zustand S: $program_S(a)$

LAUF Tripel $\rho := (M, \gamma, \sigma)$ mit: M partiell geordnete Menge von moves. Jeder Zug hat nur endlich viele Vorgänger.
$\gamma : M \to Agent$: welcher Zug von welchem Agent. Züge einzelner Agenten linar geordnet.
$\sigma : Y \to Zustand :$ Y endliches initales Segment von M, $\sigma(Y)$ Ergebnis der Durchführung dieser Züge.
Kohärenz-Bed.: X: endliches initales Segment von M. max: beliebige Teilmenge Maximaler Elemente von X. $\sigma(X) = \sigma(X\,\mathrm{max})$+Feuern der Programme der Agenten $\{\gamma(x) : x \in max\}$.

Folgerungen Kohärenz: Alle Linearisierungen von initialen Seg. von ρ haben selben Endzust.
Eigenschaft P gilt in allen erreichbaren Zust. von ρ gdw P gilt in jedem erreichbaren Zustand jeder Linearisierung von ρ